



TITLE:

二層流体中の界面波動: オイラー方程式の解と弱非線形理論の解 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

猪又, 諒祐; 花崎, 秀史

CITATION:

猪又, 諒祐 ...[et al]. 二層流体中の界面波動: オイラー方程式の解と弱非線形理論の解 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2017, 2034: 101-112

ISSUE DATE:

2017-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/236795>

RIGHT:

二層流体中の界面波動

—オイラー方程式の解と弱非線形理論の解—

京都大学大学院工学研究科 猪又 諒祐 (Ryosuke Inomata)
花崎 秀史 (Hideshi Hanazaki)
Graduate School of Engineering, Kyoto University

1 はじめに

本研究では、非粘性・非圧縮性の密度二層流体が一樣流速 U を持って二次元流路内を流れる場合を考え、流路の底面に置かれた物体によって密度界面に励起される波の解析を行う (図 1)。線形理論に基づくと、界面波の位相速度 c_p と群速度 c_g が波数 k の関数として導出され、長波長極限 ($k \rightarrow 0$) においては $c_p = c_g (= c_0)$ となる。この時、 $U = c_0$ (共鳴条件) が成り立つと物体近傍に波のエネルギーが溜まり、波の振幅が大きくなって非線形性が顕著になることが知られている。

このような非線形性を考慮するために弱非線形理論がこれまでに提案されており、Euler 方程式の近似方程式として、Korteweg-de Vries (KdV) 型の方程式が導出されている [1–8]。本研究で取り上げるのは、forced KdV (fKdV) 方程式 [4]、forced Extended KdV (fEKdV) 方程式 [5]、forced full-Extended KdV (ffEKdV) 方程式の 3 種類である。fEKdV 方程式と ffEKdV 方程式では 1 つ上のオーダーの項が考慮されており、fEKdV 方程式には 3 次の非線形項だけが、ffEKdV 方程式には 5 階微分項以外の全ての項が含まれている。

このように、弱非線形方程式に関する研究は数多く行われているが、二層流体について、その適用性を Euler 方程式の数値計算結果と比較して検証したものはほとんど報告されていない。そこで本研究では、界面波の挙動を Euler 方程式の数値計算によって調べ、その結果をもとに弱非線形方程式の適用性を検証することを目的とする。Euler 方程式を数値的に解く際には、時間ステップ毎に界面の形状に合わせて変形する移動格子を用いることにする。

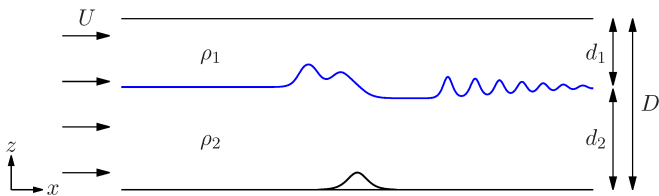


図 1: 系の概略図。

2 支配方程式

2.1 Euler 方程式

非粘性・非圧縮性の二層流体の運動は、以下の連続の式と Euler 方程式で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\rho_1/\rho_2} \nabla p_1 - \frac{1}{F_D^2} \hat{z}, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2 - \frac{1}{F_D^2} \hat{z}. \quad (2b)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u, w)$ は速度ベクトル、 t は時間、 p は圧力、 \hat{z} は鉛直上向き方向の単位ベクトルを表す。また、添え字の 1 は上層の流体 (密度 ρ_1) を、2 は下層の流体 (密度 ρ_2) を意味する。なお、式 (1),(2) には無次元化が施されており、無次元化の際に用いた代表スケールは、長さが流路の深さ D 、速度が一樣流速 U 、圧力が $\rho_2 U^2$ である。無次元パラメータであるフルード数 F_D は、

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{gD}}, \quad (3)$$

と定義されている。 g は重力加速度である。

本研究では、一樣流速 U が、長波長極限における線形界面波の位相速度 c_0 と等しくなるような共鳴条件を課す。ここで、有次元の c_0 は

$$c_0 = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1/d_1 + \rho_2/d_2}}, \quad (4)$$

と表される。この c_0 と一樣流速 U の比を取って

$$F = \frac{U}{c_0}, \quad (5)$$

を定義すると、 $F = 1$ の場合を考えれば良いことになり、フルード数 F_D の値は、

$$F_D = F \frac{c_0}{\sqrt{gD}} = \frac{c_0}{\sqrt{gD}}, \quad (6)$$

から決定される。

続いて、境界条件について示す。密度界面上では、運動学的境界条件と力学的境界条件を課す。運動学的境界条件は、密度界面上にある流体は常に界面上にあり続ける、という条件であり、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f}{\partial x} = w_1, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x} = w_2, \quad (7b)$$

と表される．ここで， $f(x, t)$ は密度界面の鉛直変位を表す．この 2 式の辺々を引き算すると

$$(u_1 - u_2) \frac{\partial f}{\partial x} = w_1 - w_2, \quad (8)$$

となり，速度に関する境界条件が得られる．また，力学的境界条件は，密度界面上での圧力のつり合いであり，

$$p_1 = p_2, \quad (9)$$

と表される．底面には

$$h(x) = h_0 \operatorname{sech}^2(0.3x), \quad (10)$$

で与えられる物体をおく．物体の最大高さは $h(0) = h_0$ である．底面 ($z = h$) と上側剛体壁 ($z = 1$) では，境界層の発達を抑えるためにスリップ条件を採用する．上流端では，一様流速 $u = (1, 0)$ を与える．

2.2 弱非線形方程式

弱非線形方程式を支配方程式 (1), (2) から導出する．まず，微小パラメータ ε を用いて，座標変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2} \left[x - \left(1 - \frac{c_0}{U} \right) t \right], \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t, \quad (11)$$

を施し，界面変位 f と底面物体 h を

$$f(x, t) = \varepsilon A(\xi, \tau), \quad h(x) = \varepsilon^2 H(\xi, \tau), \quad (12)$$

のようにスケーリングする．さらに，ポテンシャル流れ (渦なし) を仮定し，速度ポテンシャル ϕ_i ($i = 1, 2$) を ε で摂動展開して

$$\phi_i(\xi, z, \tau) = \varepsilon^{1/2} \left[\phi_i^{(1)} + \varepsilon \phi_i^{(2)} + \varepsilon^2 \phi_i^{(3)} + \varepsilon^3 \phi_i^{(4)} + O(\varepsilon^4) \right], \quad (13)$$

とする．ただし，この ϕ_i は全体の速度ポテンシャル φ_i と一様流の速度ポテンシャル Ux の差を表している ($\phi_i = \varphi_i - Ux$)．式 (13) をポテンシャル流れの方程式系に代入して整理すると，まず $O(\varepsilon^2)$ の項から，以下の forced KdV (fKdV) 方程式が導かれる．

$$\frac{U}{c_0} A_\tau + a_1 A A_\xi + a_2 A_{\xi\xi\xi} = b_1 H_\xi. \quad (14)$$

さらに， $O(\varepsilon^3)$ の項において，3 次の非線形項 $a_3 A^2 A_\xi$ だけを考慮した方程式は，forced Extended KdV (fEKdV) 方程式と呼ばれ，

$$\frac{U}{c_0} A_\tau + a_1 A A_\xi + a_2 A_{\xi\xi\xi} + \varepsilon a_3 A^2 A_\xi = b_1 H_\xi, \quad (15)$$

と表される。 $O(\varepsilon^3)$ の項のうち、5階微分項 $a_6 A_{\xi\xi\xi\xi\xi}$ 以外の全ての項を考慮した方程式を forced full-Extended KdV (ffEKdV) 方程式と呼ぶことにすると、ffEKdV 方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{U}{c_0} A_\tau + a_1 A A_\xi + a_2 A_{\xi\xi\xi} + \varepsilon (a_3 A^2 A_\xi + a_4 A_\xi A_{\xi\xi} + a_5 A A_{\xi\xi\xi}) \\ & = b_1 H_\xi + \varepsilon (b_2 H_{\xi\xi\xi} + b_3 H_\tau + b_4 A H_\xi + b_5 H A_\xi), \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで、式 (16) においては5階微分項を省略してある。その理由は、5階微分項を含めたまま ffEKdV 方程式の解を求めると、図2のように、孤立波の上流側や物体のすぐ下流側に不自然な短波が発生してしまうためである。

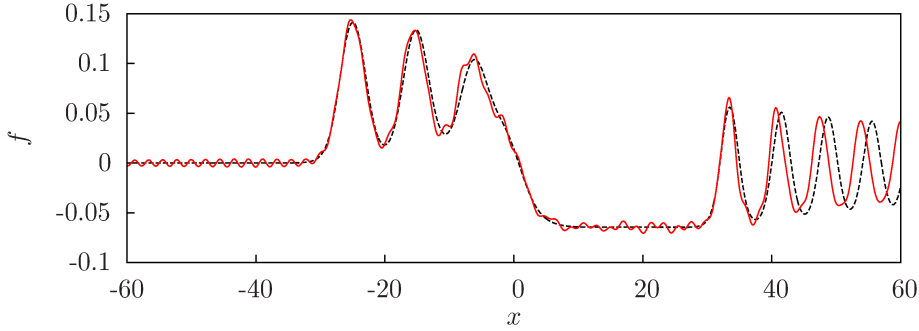


図 2: ffEKdV 方程式の解 ($\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2 = 0.6$, $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$, $t = 500$). 5階微分項なし : ----, 5階微分項あり : ———.

以上3種の弱非線形方程式それぞれについて、スケーリングを元に戻し、 (x, t) 座標で表すと次のようになる。

- forced KdV (fKdV) 方程式

$$\frac{U}{c_0} f_t + \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) f_x + a_1 f f_x + a_2 f_{xxx} = b_1 h_x \quad (17)$$

- forced Extended KdV (fEKdV) 方程式

$$\frac{U}{c_0} f_t + \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) f_x + a_1 f f_x + a_2 f_{xxx} + a_3 f^2 f_x = b_1 h_x \quad (18)$$

- forced full-Extended KdV (ffEKdV) 方程式

$$\begin{aligned} & \frac{U}{c_0} f_t + \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) f_x + a_1 f f_x + a_2 f_{xxx} + a_3 f^2 f_x + a_4 f_x f_{xx} + a_5 f f_{xxx} \\ & = b_1 h_x + b_2 h_{xxx} + \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) b_3 h_x + b_4 f h_x + b_5 h f_x \end{aligned} \quad (19)$$

弱非線形方程式の各項の係数は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{3}{2} \frac{\rho_1 d_2^2 - \rho_2 d_1^2}{d_1 d_2 (\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1)}, & b_1 &= \frac{1}{2} \frac{U}{c_0} \frac{\rho_2 d_1}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1}, \\
 a_2 &= -\frac{1}{6} \frac{d_1 d_2 (\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1}, & b_2 &= \left(\frac{1}{6} d_2^2 - \frac{3}{2} a_2 \right) b_1, \\
 a_3 &= 3 \frac{\rho_1 d_2^3 + \rho_2 d_1^3}{d_1^2 d_2^2 (\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1)} - \frac{7}{6} a_1^2, & b_3 &= \frac{1}{2} b_1, \\
 a_4 &= \frac{1}{3} \frac{d_1 d_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1} - \frac{31}{6} a_1 a_2, & b_4 &= - \left[\left(\frac{c_0}{U} + 2 \right) \frac{1}{d_2} + \frac{5}{6} a_1 \right] b_1, \\
 a_5 &= \frac{1}{6} \frac{d_1 d_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1} - \frac{7}{3} a_1 a_2, & b_5 &= - \left[\left(\frac{c_0}{U} + 2 \right) \frac{1}{d_2} + \frac{2}{3} a_1 \right] b_1, \\
 a_6 &= -\frac{1}{90} \frac{d_1 d_2 (\rho_1 d_1^3 + \rho_2 d_2^3)}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1} - \frac{3}{2} a_2^2,
 \end{aligned}$$

3 数値計算法

3.1 Euler 方程式

Euler 方程式を解く際には、非圧縮性流体の数値計算法としてよく用いられる、差分法の MAC (Marker and Cell) 法を用いる [9]。MAC 法では、圧力と速度を交互に解くことによって計算を進めていく。圧力を求めるためには圧力のポアソン方程式を導く必要があり、これについては、Euler 方程式 (2) の両辺の発散を取り、連続の式 (1) を用いることによって得られる。

本研究では、計算格子に移動格子を用いた。この格子では、格子が二層流体の密度界面に沿って存在し、時間進行と共に変形する。ただし、本研究では、格子点は z 方向にのみ移動させる。

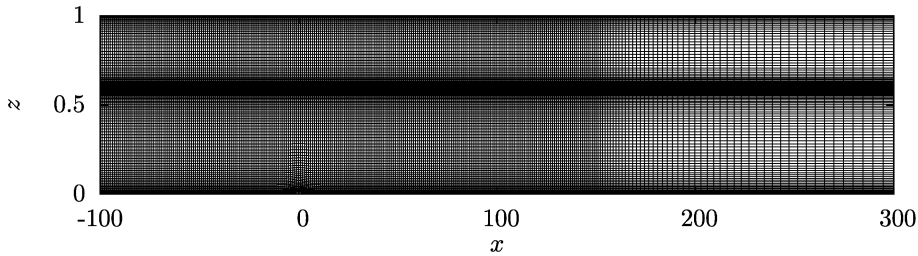
計算手順は以下の通りである。

1. 時刻 $t = n\Delta t$ における \mathbf{u}^n の値を用いて、圧力のポアソン方程式を反復法である SOR 法によって解き、 p^n を求める。密度界面上の圧力は、外挿と式 (9) によって求める。
2. p^n, \mathbf{u}^n の値を用いて、式 (2) から次の時刻 $t = (n+1)\Delta t$ における \mathbf{u}^{n+1} を求める。密度界面上の速度は、外挿と式 (8) によって求める。
3. 密度界面上の \mathbf{u}^{n+1} を用いて、式 (7) から界面変位 f^{n+1} を求める。
4. f^{n+1} に合わせて、格子を変形させる。

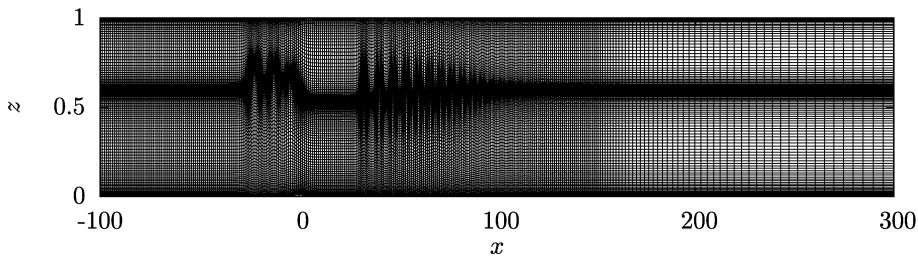
以上の手順を繰り返すことで、速度、圧力及び界面変位の時間発展解が得られる。

方程式を離散化する際、Euler 方程式 (2) の非線形項には 3 次精度の上流差分 [9] を、他の空間微分項には 2 次精度の中心差分を用いる。Euler 方程式 (2) の時間積分には 2 次精度の Adams-Bashforth 法を、運動学的境界条件 (7) の時間積分には 2 次精度の Crank-Nicolson 法を用いる。時間刻みは $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ として計算を行う。

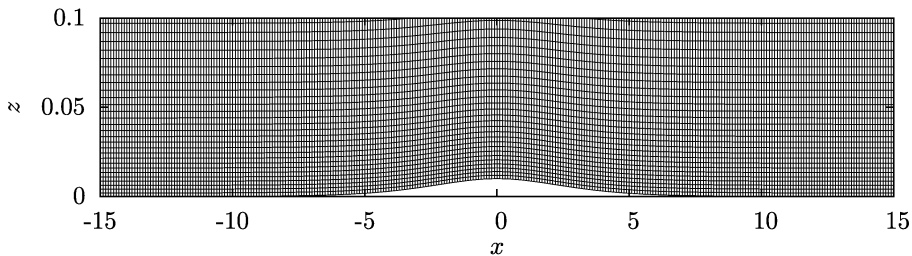
次に、本研究で用いた計算格子を図3に示す．計算格子点は計算領域に 3001×201 点を設定する．水平方向に関しては、物体付近 ($-100 \leq x \leq 150$) に格子を集中させ、一定の格子間隔 $(\Delta x)_{\min} = 0.1$ とする．それより下流側 ($x \geq 150$) では、格子間隔 Δx を徐々に大きくしている．鉛直方向に関しては、界面 ($z = d_2$) 付近と底面 ($z = h$) 付近、上側剛体壁 ($z = 1$) 付近に格子を集中させ、最小格子間隔は $(\Delta z)_{\min} = 0.002$ とする．



(a) 領域全体 ($t = 0$).



(b) 領域全体 ($t = 500$).



(c) 底面物体付近 ($t = 0$).

図 3: 計算格子 ($d_2 = 0.6$, $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$). 格子点数は 3001×201 点である．(a) と (b) では、水平方向は 10 本おき、鉛直方向は 2 本おきに格子線を示している．(c) では、格子線の間引きはない．

続いて、数値計算によって得られる界面波の波形が格子点数 (格子間隔) に依存していないことを確かめる．図3に示した 3001×201 点の格子 (grid 1) と、水平方向と鉛直方向共に格子点数を2倍にした 6001×401 点の格子 (grid 2) による計算結果を比較したものを図4に示す．ただし、ここでは $\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2 = 0.6$, $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ とした．図4を見る限りでは両者の数値解に差異は見られないため、本研究で用いる計算格子は、 3001×201 点の格子 (grid 1) で十分であると言える．

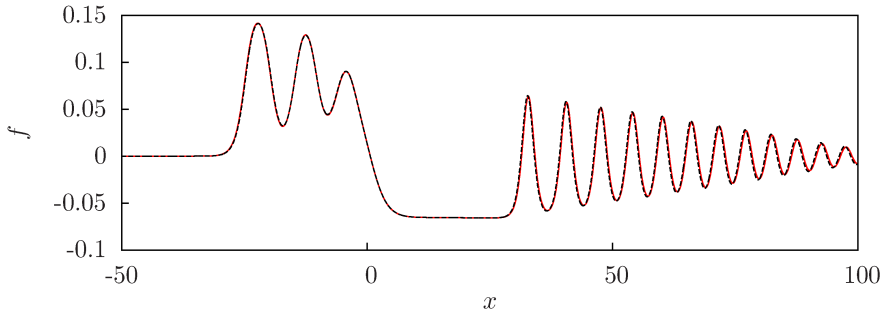


図 4: grid 1 (3001×201 点) と grid 2 (6001×401 点) による計算結果の比較 ($\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2 = 0.6$, $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$, $t = 500$). grid 1 : —, grid 2 : - - - -.

3.2 弱非線形方程式

弱非線形方程式を計算する際は、周期境界条件を課し、スペクトル法を用いる [10]. x 方向の格子間隔は等間隔で、 $\Delta x = 0.125$ とする. 時間積分には 4 次精度のルンゲ・クッタ法を用い、時間刻みは $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ とする.

4 結果と考察

4.1 Euler 方程式の数値計算結果の例

まずは、Euler 方程式の数値計算結果の一例を示す. $\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2 = 0.6$, $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ とした場合の界面波の時間発展の様子を図 5 に示す. 物体の上流側 ($x \leq 0$) には孤立波 (ソリトン) の列が発生し、下流側 ($x \geq 0$) には変調クノイダル波 [4] が発生する. このように、二層流体の界面波の挙動を、Euler 方程式を解くことによって求めることが可能になった.

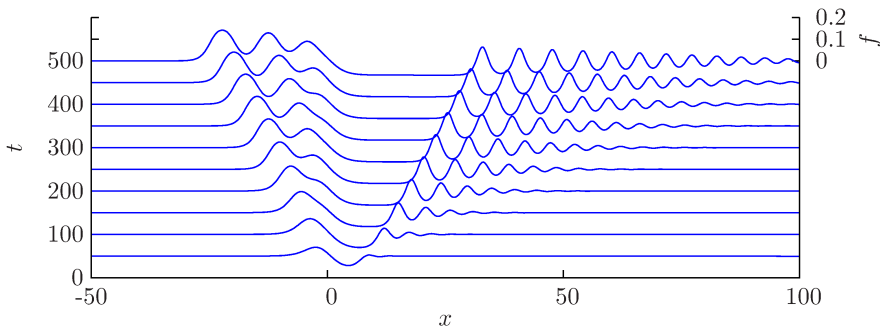


図 5: 界面波の時間発展の様子 ($\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2 = 0.6$, $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$).

4.2 弱非線形方程式における 2 次の非線形項と 3 次の非線形項の比

fEKdV 方程式 (15) には, fKdV 方程式 (14) がない, 3 次の非線形項 $\varepsilon a_3 A^2 A_\xi$ が含まれる. この 3 次の非線形項の寄与を評価する指標として, 2 次の非線形項との比

$$\frac{\varepsilon a_3 A^2 A_\xi}{a_1 A A_\xi} = \frac{a_3}{a_1} \varepsilon A \sim \frac{a_3}{a_1} f, \quad (20)$$

を考える. ここで, 式 (20) 中の係数比 a_3/a_1 は

$$\frac{a_3}{a_1} = 2 \frac{\rho_1 d_2^3 + \rho_2 d_1^3}{d_1 d_2 (\rho_1 d_2^2 - \rho_2 d_1^2)} - \frac{7}{6} a_1, \quad (21)$$

と与えられる. ここで, 横軸を d_2 , 縦軸を ρ_1/ρ_2 としたときの a_3/a_1 の等値線図を図 6 に示す. 図 6 の太線上では, $a_1 = 0$, すなわち,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2, \quad (22)$$

が満たされ, $a_3/a_1 = \pm\infty$ となる. 図 6 から, a_3/a_1 が ρ_1/ρ_2 や d_2 に対してどのように変化するかが分かる.

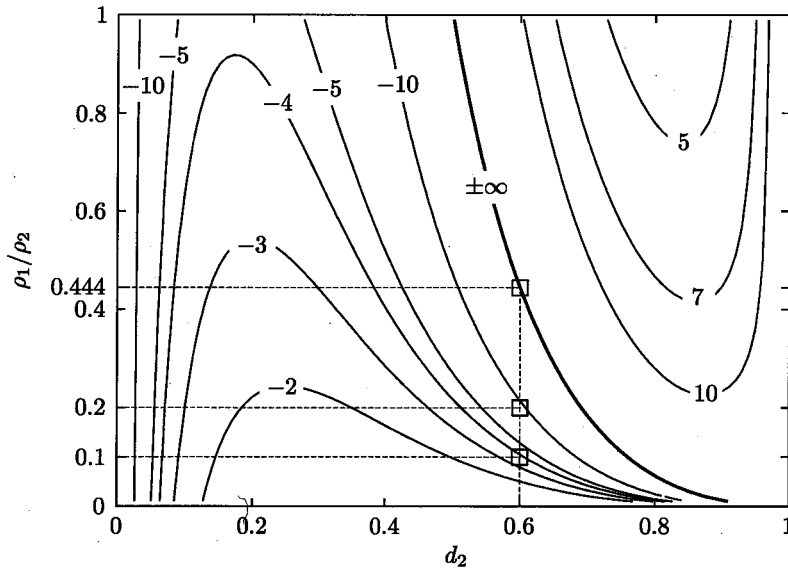


図 6: a_3/a_1 の等値線図. 太線は $a_3/a_1 = \pm\infty$ ($a_1 = 0$) となる曲線を表す. □印は本稿に計算結果を記載したパラメータを示している.

本研究では, 2 次の非線形項と 3 次の非線形項の比 (20) の値に着目し, 界面変位 f や係数比 a_3/a_1 が変化する場合に, 弱非線形方程式の適用性がどうなるかを調べる.

4.3 Euler 方程式と弱非線形方程式の解の比較 (界面変位 f が変化する場合)

ここでは, $\rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2 = 0.6$ とし, 係数比を $a_3/a_1 = -3.79$ に固定する. そして, 底面物体の高さ h_0 を変化させることによって, 界面変位 f の大きさを変化させる. $h_0 = 1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 1.0 \times 10^{-2}$ の3つの場合について計算を行うことにする. それぞれの場合について, Euler 方程式と3種の弱非線形方程式の解を重ね合わせたものを図7に示す. また, そのときの諸量の値を表1に示す.

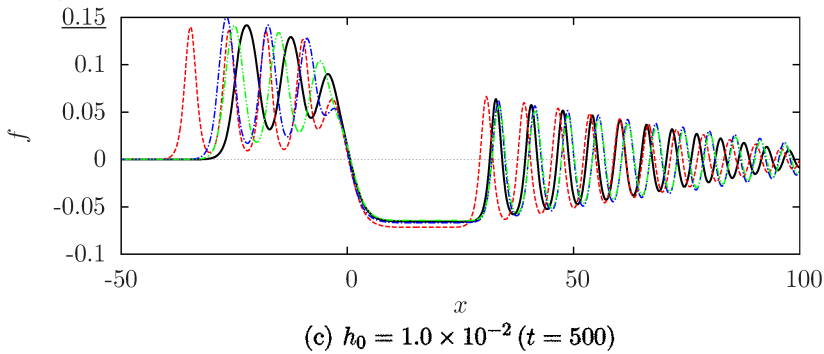
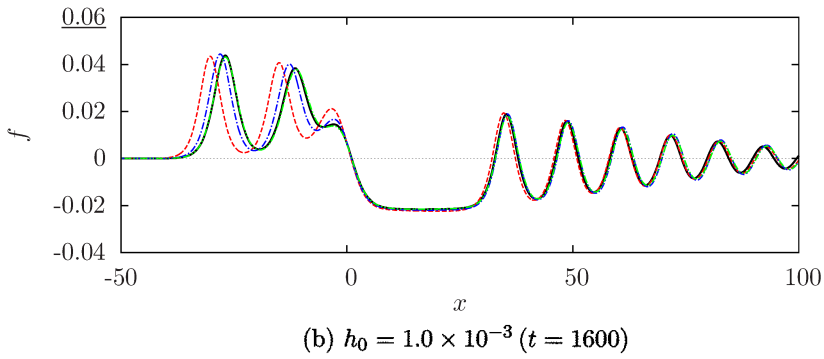
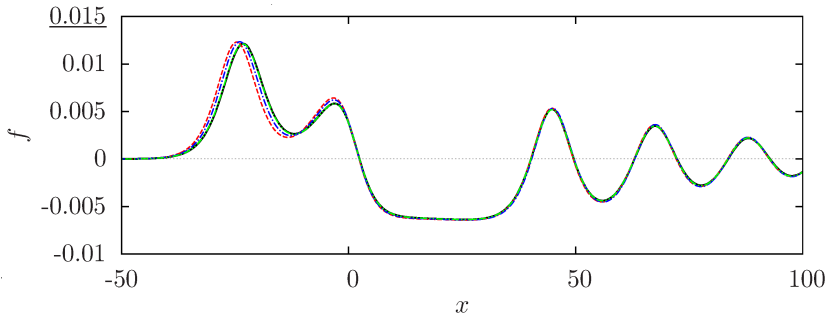


図 7: $\rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2 = 0.6 (a_3/a_1 = -3.79)$ での計算結果. Euler 方程式: ———, fKdV 方程式: - - - - -, ffKdV 方程式: - · - · - · -, fKF 方程式: ·····.

	h_0	ρ_1/ρ_2	d_2	f	a_3/a_1	$ a_3 f/a_1 $
(a)	1.0×10^{-4}	0.1	0.6	0.01	-3.79	0.04
(b)	1.0×10^{-3}	0.1	0.6	0.04	-3.79	0.15
(c)	1.0×10^{-2}	0.1	0.6	0.15	-3.79	0.57

表 1: 図 7 における計算パラメータとそのときの諸量の値. なお, 界面変位 f の値は, Euler 方程式の計算結果から求めている.

まず, $h_0 = 1.0 \times 10^{-4}$ の場合は, 界面変位 f の大きさが 0.01 程度であり, Euler 方程式と 3 種の弱非線形方程式の解はほぼ一致している. つまり, 全ての弱非線形方程式が Euler 方程式を良く近似できているとすることができる. 次に, $h_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ の場合, f の大きさは 0.04 程度まで大きくなる. 物体の下流側 ($x \geq 0$) では, 全ての弱非線形方程式が Euler 方程式を良く近似できている. 上流側 ($x \leq 0$) では, fKdV 方程式と Euler 方程式の解のずれが目立ってきているのに対し, fEKdV, ffEKdV 方程式は Euler 方程式の良い近似解を与えている. 最後に, $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ の場合, f の大きさは 0.15 程度まで大きくなる. 下流側の $30 \leq x \leq 50$ あたりでは, fKdV 方程式と Euler 方程式の解のずれは目立つが, fEKdV, ffEKdV 方程式の解は Euler 方程式の解と良く一致している. 上流側 ($x \leq 0$) では, 弱非線形方程式 3 種とも Euler 方程式の解からずれる結果となった. その中では, ffEKdV, fEKdV, fKdV 方程式の順に Euler 方程式に近い解を与えた.

以上のように, 界面変位 f が大きくなるにつれて, fKdV 方程式と Euler 方程式の解のずれは顕著になり, fEKdV 方程式や ffEKdV 方程式の方がより良い近似解を与えることが分かった. 今回の $|a_3/a_1| = 3.79$ という条件下では, 界面変位 f がかなり小さくない限り $|a_3 f/a_1| \ll 1$ とはならず, 3 次の非線形項の効果が無視できない. そのために, ある程度 f が大きくなっただけで fKdV 方程式が適用できなくなったと考えられる. このような性質は, 二層流体の界面波に特有のものであり, 密度一様流体の水面波の場合は話が異なってくる. 水面波に対する弱非線形方程式では $|a_3/a_1| = 0.25$ しかないため, 一桁程度大きな界面変位 f に対しても fKdV 方程式が適用できる. Hanazaki [7] でも議論されているように, このことが界面波と水面波の決定的な違いとなる.

同様の議論で, 界面変位 f がかなり大きい場合には, 3 次の非線形項以外の高次の項も支配的になってくるため, そのような状況下では fEKdV 方程式よりも ffEKdV 方程式の方が有効になる.

4.4 Euler 方程式と弱非線形方程式の解の比較 (係数比 a_3/a_1 が変化する場合)

ここでは, 底面物体の高さを $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ と固定し, 界面変位 f の大きさが同程度になるようにする. そして, 層の厚さを $d_2 = 0.6$ に固定したまま密度比 ρ_1/ρ_2 を変化させることで, 係数比 a_3/a_1 の絶対値を 4.3 節での値 ($|a_3/a_1| = 3.79$) よりも大きくした場合を考える. $\rho_1/\rho_2 = 0.2, 0.444$ としたときの, Euler 方程式と 3 種の弱非線形方程式の計算結果を図 8 に, そのときの諸量の値を表 2 に示す.

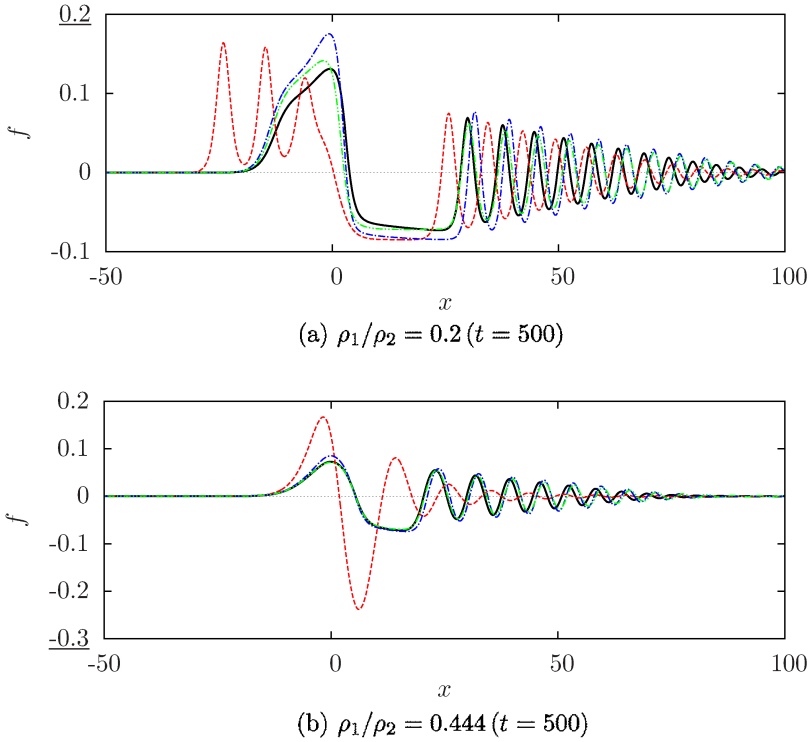


図 8: $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$, $d_2 = 0.6$ での計算結果. Euler 方程式: —, fKdV 方程式: - - - -, fEKdV 方程式: - · - · - · -, ffEKdV 方程式: · · · · ·.

·	h_0	ρ_1/ρ_2	d_2	f	a_3/a_1	$ a_3 f/a_1 $
(a)	1.0×10^{-2}	0.2	0.6	0.13	-8.91	1.16
(b)	1.0×10^{-2}	0.444	0.6	0.07	$\pm\infty$	∞

表 2: 図8における計算パラメータとそのときの諸量の値. なお, 界面変位 f の値は, Euler 方程式の計算結果から求めている.

まず, $\rho_1/\rho_2 = 0.2$ の場合, Euler 方程式の解では上流側に台形状の波が発生している. ffEKdV 方程式と fEKdV 方程式はこの台形状の波を再現できているが, fKdV 方程式では再現できていない. また, fEKdV 方程式と ffEKdV 方程式を比較すると, やはり ffEKdV 方程式の方が Euler 方程式に近い解を与えている. 次に, $\rho_1/\rho_2 = 0.444$ の場合, Euler 方程式と fKdV 方程式の解が大きくずれていることが分かる. それに対し, fEKdV 方程式と ffEKdV 方程式は良い近似解を与えており, 特に ffEKdV 方程式と Euler 方程式の解はほぼ一致している.

この 4.4 節では, $|a_3/a_1|$ の値が 4.3 節よりも大きくなるような条件で弱非線形方程式の適用性を検証した. その結果, 予想通り fKdV 方程式は適用できず, 3 次の非線形項を含む fEKdV 方程式や ffEKdV 方程式の方が有効になることが分かった. また, ここでも

fEKdV 方程式が Euler 方程式の最も良い近似解を与えた。

5 結論

まず、移動格子を用いた Euler 方程式の数値計算によって、二層流体の界面波の挙動を調べることが可能になった。次に、Euler 方程式の計算結果をもとに弱非線形方程式の適用性を検証した。検証にあたっては、弱非線形方程式における 2 次の非線形項と 3 次の非線形項の比 (20) の値に着目した。二層流体の界面波では、密度一様流体の水面波の場合とは異なり $|a_3/a_1|$ が大きな値を取りやすいため、界面変位 f がかなり小さくない限り比 (20) の値は無視できない大きさとなる。これは、弱非線形方程式における 3 次の非線形項の効果を無視できないことを示しており、そのような場合は fKdV 方程式が適用できなくなり、fEKdV 方程式や ffEKdV 方程式が有効になることが分かった。また、界面変位 f がかなり大きい場合には、fEKdV 方程式よりも ffEKdV 方程式の方が Euler 方程式の良い近似解を与えることが分かった。本稿の計算結果から具体的には、 $|a_3 f/a_1| \leq 0.15 (\ll 1)$ のときだけ fKdV 方程式が有効であり、 $|a_3 f/a_1| \geq 0.57 (\gtrsim 0.5)$ のときは fEKdV 方程式や ffEKdV 方程式を用いるべきであると言える。

参考文献

- [1] Kakutani, T & Yamasaki, N. 1978 Solitary waves on a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Jpn.* **45**, 674-679.
- [2] J. W. Miles 1979 On internal solitary waves. *Tellus* **31**, 456-462.
- [3] C. G. Koop & G. Butler 1981 An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system. *J. Fluid Mech.* **112**, 225-251.
- [4] R. H. J. Grimshaw & N. Smyth 1986 Resonant flow of a stratified fluid over topography. *J. Fluid Mech.* **169**, 429-464.
- [5] W. K. Melville & K. R. Helfrich 1987 Transcritical two-layer flow over topography. *J. Fluid Mech.* **178**, 31-52.
- [6] T. R. Marchant & N. F. Smyth 1990 The extended Korteweg-de Vries equation and the resonant flow of a fluid over topography. *J. Fluid Mech.* **221**, 263-288.
- [7] Hanazaki, H. 1992 A numerical study of nonlinear waves in a transcritical flow of stratified fluid past an obstacle. *Phys. Fluids A* **4**, 2230-2243.
- [8] T. R. Marchant 1999 Coupled Korteweg-de Vries equations describing, to high-order, resonant flow of a fluid over topography. *Phys. Fluids* **11**, 1797-1804.
- [9] 高見穎郎, 河村哲也 2007 偏微分方程式の差分法. 東京大学出版会.
- [10] 石岡圭一 2004 スペクトル法による数値計算入門. 東京大学出版会.